Année 2004/2005

Durée : 3h00
Documents non autorisés
Calculatrice autorisée.

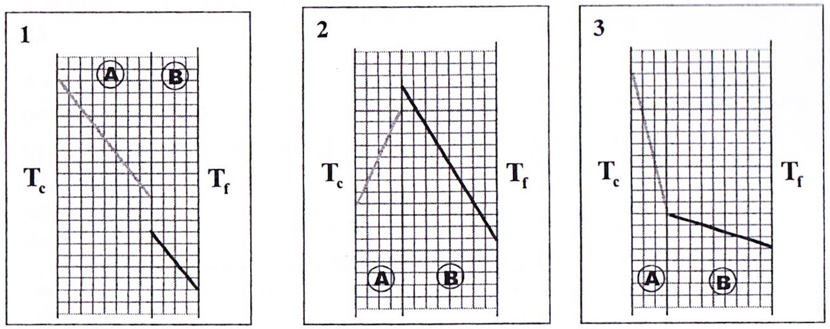
EXERCICE 1 : PROFILS DE TEMPERATURE

Une paroi composite passive constituée de deux couches A et B de matériaux de conductivités λ_a et λ_b sépare un fluide chaud à la température T_c d'un fluide froid à la température T_f. Pour un régime stationnaire, on étudie la variation de la température le long d'un axe perpendiculaire à la paroi.
Faites les associations logiques des situations A,B ou C décrites ci-dessous aux figures 1,2 ou 3. On expliquera son choix d'un commentaire précis.

A) La conductivité de la paroi A est inférieure à celle de la paroi B. Dans quel rapport ?

B) Les conductivités des deux matériaux sont quasiment égales.

C) Une résistance de contact existe entre les deux milieux.

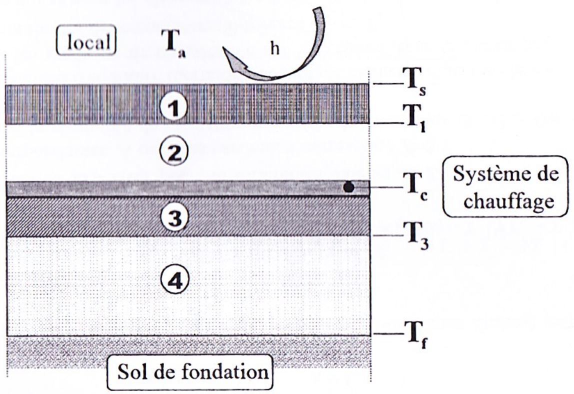


Figures

Réponse :
A-3 : $\Delta T = R\Phi$ avec $R = e/\lambda$. A Flux constant (donné) en Régime Permanent, la pente des profils de température est l'image de $1/\lambda$.
Pente forte ⇒ conductivité faible et donc $\lambda_A < \lambda_B$.
Rapport : $\Delta T|_A = 12 = \dfrac{e}{\lambda_A}\Phi$ et $\Delta T|_B = 3 = \dfrac{3e}{\lambda_B}\Phi$ soit par rapport des deux équations, conductivité de B 12 fois plus faible que celle de A.
B-1 : Pentes égales.
C-1 : Résistance Contact ⇒ saut de température à l'interface, ça ne peut être que 1 car la figure 2 n'a aucun sens physique.

EXERCICE 2 : ETUDE D'UN PLANCHER CHAUFFANT

La figure ci-dessous représente la coupe transversale d'un plancher dans lequel on a incorporé un système de chauffage. Ce système est constitué d'un tube dans lequel circule de l'eau à la température moyenne supposée constante $T_c = 40°C$. On assimile le système de chauffage à un plan horizontal à la température uniforme T_c.
On note $T_a = 20°C$ et $T_f = 7°C$ respectivement la température du local et la température du sol de fondation. On note $h = 10\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ le coefficient d'échange par convection entre la surface du revêtement du plancher à la température T_s et le milieu ambiant à la température T_a.



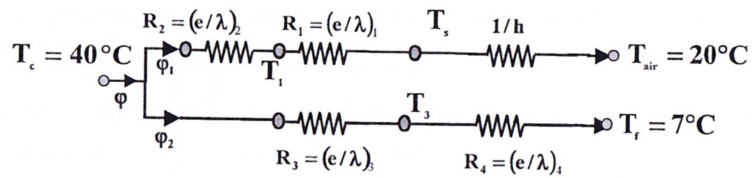
Les caractéristiques des matériaux constituant le plancher sont les suivantes :

Désignations	Indices	Conductivités (S.I)	Epaisseurs (cm)
Revêtement	1	2.50	1
Mortier	2	1.15	5
Isolant	3	0.02	2
Béton	4	1.4	10

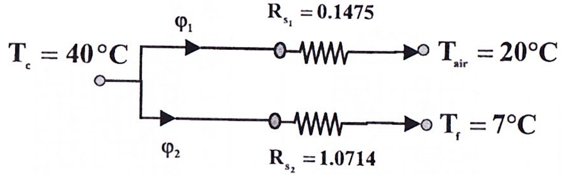
1) Dessiner le schéma électrique équivalent du système étudié dûment annoté (les flux, potentiels, expressions des résistances)

2) Répondre aux questions suivantes avec les formules utiles extraites du schéma de 1):
2.1 Puissance totale délivrée par le système de chauffage par m^2 de plancher chauffant ?
2.2 Calcul des températures T_s, T_1, T_3.
2.3 Pourcentage de puissance perdue par le sol de fondation ?
2.4 Epaisseur d'isolant pour limiter les pertes thermiques à 10% ? (on considère la même température du sol de fondation).
2.5 Puissance reçue par un local de 12 m^2 de surface ?

1)



2)
Remarque : toutes les résistances sont connues



2.1
En appliquant les deux lois d'Ohm, $T_c - T_a = 20 = R_{s_1}\varphi_1$, $T_c - T_f = 33 = R_{s_2}\varphi_2$
On trouve $\varphi_1 = 135.6 \quad W \cdot m^{-2}$, $\varphi_2 = 30.8 \quad W \cdot m^{-2}$ d'où par la loi des nœuds $\varphi = 166.4 \quad W \cdot m^{-2}$

2.2
$T_s = 33.56°C$, $T_1 = 34.1°C$, $T_3 = 9.2°C$

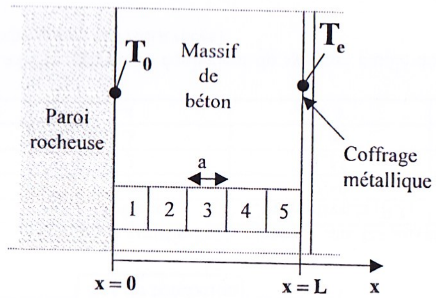
2.3
18,5 %

2.4
$\varphi_2 \le 0.1\varphi = 16.6 \Rightarrow R_{s_2} \ge 2 \Rightarrow e_3 \ge 3.86\,cm$

2.5
1627 Watts

EXERCICE 3 : ETUDE D'UN MASSIF DE BETON

Un massif de béton d'épaisseur L est coulé contre une paroi rocheuse dont la surface, dans le cas considéré, est isotherme à la température T_0. La prise du béton correspond à une réaction chimique exothermique dont la puissance moyenne par unité de volume est notée **p**. Ce massif de béton, de conductivité thermique λ, est compris entre la paroi rocheuse et un coffrage métallique dont la résistance thermique peut être négligée. Le coffrage est arrosé en permanence avec de l'eau froide et l'on considère qu'il est ainsi maintenu à la température T_e de cette eau.
Le problème est traité en régime permanent et en monodimensionel.



1.1 Etablir le système d'équations (bilan local d'énergie + Conditions limites) permettant de résoudre le problème.
1.2 Résoudre le problème
1.3 Mettre la solution sous la forme adimensionnelle suivante
$$\Theta(\alpha) = [1-\alpha]\cdot[1+Z\alpha] \quad \text{où} \quad \alpha = x/L \quad \text{et} \quad \Theta(\alpha) = (T(\alpha)-T_e)/(T_0-T_e)$$
Expression de **Z**?
1.4 Etudier la fonction $\Theta = f(\alpha)$ pour les différentes valeurs de **Z** (0, +1, +15) et tracer les courbes correspondantes. A quel cas particulier correspond **Z=0** ?
1.5 On entreprend la résolution de l'équation par méthode numérique discrète. On découpe le mur en 5 éléments (cf schéma).
Ecrire les équations d'équilibre thermique de chaque élément. Pour les éléments 1 et 5 on approximera les gradients de température sur ½ élément pour respecter précisément les conditions aux limites de températures imposées T_0 et T_e.
1.6 La résolution donne pour les éléments 1,2,4,5 les valeurs suivantes : **17, 25, 23, 13**
Calculer la température de l'élément 3. Vérifier cette valeur avec l'application numérique de la solution exacte. (Avec 11 éléments, on trouve $T_6 = T_{max} = 26.25\,°C$)
On prendra pour les calculs : $p = 150\ W \cdot m^{-3}$, $L = 1$, $\lambda = 1$, $T_0 = 10°C$, $T_e = 5°C$

Rappel : l'équation de la chaleur s'écrit $-\mathrm{div}\vec{\varphi}_c + p = \rho C_p \dfrac{\partial T}{\partial t}$ avec $\vec{\varphi}_c$ flux conductif donné par la loi de Fourier.

Correction :

1.1 $\dfrac{d^2T}{dx^2}+\dfrac{p}{\lambda}=0$ en considérant $T(x)$ et λ constant

Les conditions aux limites sont toutes deux du type "Température imposée" soit

$T(x=0)=T_0$ et $T(x=e)=T_e$

1.2 La solution formelle est $T(x)=-\dfrac{p}{2\lambda}x^2+K_1x+K_2$

L'application des CL donne $K_2=T_0$ et $K_1=\left(T_e-T_0+\dfrac{pL^2}{2\lambda}\right)\dfrac{1}{L}$

1.3 On retranche T_e aux deux membres de l'égalité donnant la solution tout en faisant apparaître $\alpha=x/L$ ce qui permet d'obtenir

$$T(\alpha)-T_e=-\frac{pL^2}{2\lambda}\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(T_e-T_0+\frac{pL^2}{2\lambda}\right)\frac{x}{L}+(T_0-T_e)$$

soit $\Theta(\alpha)=[1-\alpha]\cdot[1+Z\alpha]$ avec $\Theta(\alpha)=(T(\alpha)-T_e)/(T_0-T_e)$ et

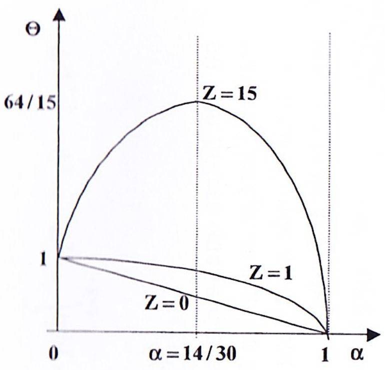
$$Z=\frac{pL^2}{2\lambda(T_0-T_e)}$$

1.4 $\Theta(\alpha)=[1-\alpha]\cdot[1+Z\alpha]=1+(Z-1)\alpha-Z\alpha^2$ forme générale du profil = parabole

$\dfrac{d\Theta}{d\alpha}=Z-1-2Z\alpha$ donc maximum de température dans le mur pour $\alpha_{max}=\dfrac{Z-1}{2Z}$

Cas Z=0 : physiquement pas de source, on retrouve bien par les résultats que le profil est linéaire
Cas Z=1 : le maximum de température est obtenu pour $\alpha=0$, donc du côté du sol.
Cas Z=15, le maximum est obtenu pour $\alpha=14/30$ soit à peu près à la moitié de l'épaisseur du mur ou la température adimensionnée $\Theta(\alpha_{max})=64/15$ soit approximativement **4,25**.

Résultats sur le schéma



1.5

<u>Elément 1:</u> $\lambda aL\dfrac{(T_r-T_1)}{a/2}+\lambda aL\dfrac{(T_2-T_1)}{a}+pa^2L=0$ soit $\lambda(2T_r+T_2-3T_1)+pa^2=0$

<u>Elément 2 :</u> $\lambda(T_1+T_3-2T_2)+pa^2=0$

Etc etc

Ce qui donne la forme matricielle

$$\begin{bmatrix}-3&1&0&0&0\\1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\end{bmatrix}=(-pa^2/\lambda)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2T_0\\0\\0\\0\\2T_e\end{bmatrix}$$

1.6
$(T_2-2T_3+T_4)=-pa^2/\lambda$ soit $T_3=27°C$

Pour le calcul avec la solution exacte, les données fournissent $Z=15$.
On voit donc que la température de l'élément T_3 correspond à la température dans la zone médiane du mur. On a vu que c'est là qu'intervient le maximum pour **Z=15** et qu'il conduit à une valeur $\Theta=4.25$ soit une température $T_{max}=T_e+4.25\times(T_0-T_e)=26.25°C$

Ce résultat est confirmé par le calcul discret avec 11 éléments dont la température n°6 donnée correspond bien à la température au milieu du mur.